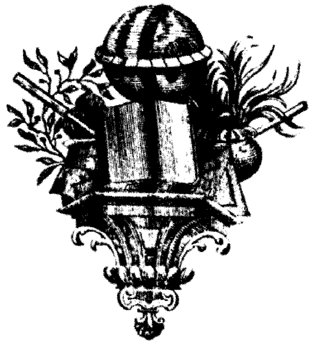
LETTERA
DI
LUIGI DE LA GRANGE TOURNIER
TORINESE
ALL' ILLUSTRISSIMO SIGNOR CONTE
GIULIO CARLO DA FAGNANO
Marchese de' Toschi, e di S. Onorio, Nobile Romano, e Senogagliese, Matematico celebratissimo.

Contenente una nuova serie per i differenziali, ed integrali di qualsivoglia grado corrispondente alla Nevvtoniana per le potestà, e le radici.



IN TORINO, MDCCLIV.

NELLA STAMPERIA REALE. *Con lic. de' Sup.*

ILLUSTRISSIMO SIGNORE.

NELLA ſerie, che ho comunicata a V.S. Illuſtriſs., mi luſingava ben io d'avere ampiamente compreſe varie operazioni del calcolo sì differenziale, che integrale di qualunque grado; e col paragone di quella colla tanto celebratiſſima ſerie Newtoniana per le poteſtà mi pareva in vero d'aver ſcoperta una corriſpondenza non diſpregevole tra 'l calcolo delle infinite, e quello delle finite grandezze; ma poichè in ſomma non altro, che nuova comprenſione, e riporto di calcoli notiſſimi per quello qualunque ritrovamento ſi paleſava, e nulla realmente ſi diſvelava, che nuova ſcienza chiamarſi poteſſe, anzi che offerirlo al pubblico, che oramai tutto nauſea, e ſchifa, che non ſia di ſomma importanza per le umane cognizioni, penſava trarne aſſai ampio frutto, ritenendolo per me a mio privato uſo, e ad agevolare gli ſtudj della mia affatto giovenile età, la quale, anzichè atta a ſomminiſtrare altrui, è pur del tutto biſognoſa di ricevere da altri lume, e ſcienza; Ma i cenni della degnevoliſſima Lettera di V. S. Illuſtriſs. mi ſono in luogo di autorevole comandamento; e poichè a Lei piace, che ſi pubblichi la ſuddetta ſerie, non dubito di recar malgrado a veruno, obbedendo a Lei, ed a Lei anzi offerendola, che molto più di quello, che essa abbia in se, può darle di dignità col suo ragguardevolissimo giudizio, se come si è compiaciuta di commendarla, finchè era nelle mie mani, vorrà riguardarla con egual benignità ora, che la ripongo nelle sue. Che se pur Ella tollerasse, che a Lei sola questo mio picciolo ritrovato io presentassi, sarebbe di già compita interamente l' offerta, senza che ora di vantaggio estendermi dovessi in dichiararlo. Che sa bene tutto il mondo letterato, come e le sottili sue opere, ed i grandissimi applausi dalle più celebri Accademie ricevuti ne lo attestano, che a Lei basta il proporsi a snodare qualunque più riposto arcano delle Matematiche, per comprenderne tosto in uno e lo scioglimento, e le conseguenze. Ed altronde, queste, che a Lei offro, mie riflessioni, sono pur di tal natura, che anche a' ingegni meno sublimi basta accennarle, perchè ad essi spontaneamente possano manifestarsi. Ma pure giacchè Ella vuole, che io scriva ad ognuno, che di sì fatte materie abbia comunque vaghezza, penso, che non m' abuserò della pazienza di Lei, se più oltre mi dilungherò, come tale mira richiede, e vuole. Dunque primieramente propongo le due serie, la Newtoniana per le potestà, e la mia per i differenziali, ed integrali, sicchè in una sola occhiata se ne comprenda ogni possibile rapporto, e corrispondenza.

$$(a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + m\frac{(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3} a^{m-3} b^3 + \text{ec.}$$

$$(xy)^m = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + m\frac{(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3} x^{m-3} y^3 + \text{ec.}$$

Dun-

Dunque I. Siccome la prima serie serve per elevare a qualunque potestà la somma di due, e conseguentemente di quantunque quantità date, facendo l' esponente m eguale al numero del grado della potestà data; così la seconda serve per differenziare in qualsivoglia grado un qualunque prodotto di due, e conseguentemente di quantunque variabili, facendo nella stessa guisa l' esponente m eguale al numero del differenzial proposto,

II. Siccome la prima serie vale similmente per estrarre qualunque radice dalla somma di due, o quantunque quantità, facendo l' esponente m eguale al numero rotto del grado della radice data; così la seconda serve per ridurre ad integrale di qualunque grado un qualunque prodotto di due, o quantunque quantità finite, od infinitesime, facendo l' esponente m eguale al numero intero (ma preso negativamente) del grado dell' integrale dato.

Finalmente, siccome nella prima serie l' esponente, ove resta eguale a zero, fa, che la quantità, cui esso appartiene, si debba intender elevata alla potestà nulla, e conseguentemente eguale ad 1; così nella seconda esso indica in tal quantità non avervi luogo, nè differenziazione, ne integrazione, e perciò doversi essa lasciare tal quale si trova.

Onde, come diceva nella stessa guisa appunto, che dell' una ci serviamo per l' elevazioni a potestà, ed estrazioni di qualunque radice, potremo dell' altra valersi per le differenziazioni, ed integrazioni di qualsivoglia grado.

Sia dunque da differenziarsi la quantità xy; in questo caso poichè il differenzial cercato si è il primo, m sarà $=1$, e però la serie generale piglierà questa forma $x^1y^0 + x^0y^1$, cioè ridotta alla comune maniera di scrivere (che secondo l' uso introdotto il numero del grado della differenziazione si applica alla lettera d, o pure si segna con altrettanti punti) $dxy + xdy$.

Se

Se in luogo del primo si voglia il secondo, o il terzo differenziale sarà $m = 2$, od $= 3$, ed i ricercati differenziali, fatte le sostituzioni in luogo di m, saranno il secondo $x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2$, ed il terzo $x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3$, i quali come sopra ridotti rendono l' uno $d^2xy + 2dxdy + xd^2y$, e l'altro $d^3xy + 3d^2xdy + 3dxd^2y + xd^3y$, veri differenziali della quantità proposta, se si pigli anche il dx per fluente, e lo stesso s' intenda de' differenziali di qualunque siasi ulteriore grado.

E come queste operazioni di differenziare per questa serie nulla più hanno di difficoltà, che quelle di elevare a potestà per la Newtoniana, così nulla più difficile si è l' integrare con quella di quel, che lo sia l' estrar le radici per mezzo di questa.

Debbasi per esempio, per aver la quadratura indefinita di qualsivoglia curva, ritrovar l' integrale dell' elemento dell' area ydx. Si supponga nel canone generale $dx = x$; sarà per quel, che di sopra s' è detto $m = -1$, i quali valori in esso sostituiti, avremo la serie particolare $dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + dx^{-5}y^4 -$ ec.

Ora dx^{-1} dinota l' integrale di dx, dx^{-2} l' integral dell' integrale di dx, (cioè l' integrale di x) che io chiamo integral secondo di dx, e segno in questa guisa ${}^2\!\int dx$, dx^{-3} l' integral terzo di dx, cioè ${}^3\!\int dx$ ec.

Ma $\int dx = x$, ${}^2\!\int dx = \frac{x^2}{2dx}$, ${}^3\!\int dx = \frac{x^3}{2.3dx^2}$, e generalmente, ${}^m\!\int dx = \frac{x^m}{2.3.4.5\ \dots\ mdx^{m-1}}$ (come chiunque se ne può accertare, differenziando tali quantità, una, due, tre volte secondo il grado dell' integrazione, pigliando però sempre il dx per costante); dunque sostituiti questi valori nella serie ultimamente trovata, e posti secondo l' usanza dy, d^2y, d^3y ec. in luogo di y^1, y^2, y^3 ec. essa sarà in fine

$$xy - \frac{x^2dy}{2dx} + \frac{x^3d^2y}{2.3dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2.3.4dx^3} + \frac{x^5d^4y}{2.3.4.5dx^4} - \text{ec.} = \int ydx$$

La

La qual serie particolare dalla mia universal derivata, vede benissimo, V. S. Illustriss., che non è altra, che quella stessa tanto celebrata, che di già scoprì il Chiarissimo Sig. Giovanni Bernuollio, e pubblicò poscia negli atti degli eruditi del mese di Novembre 1694.

Del resto, non solo a' differenziali di primo grado s' estende questa mia serie, ma bensì ad integrar con una sola operazione eziandio quelli di qualunque ulterior grado. Richerchisi l' integral secondo di $dydx$, fatto dunque $m = -2.$, e supposto $x = dx$, ed $y = dy$ otterremo la seguente serie $dx^{-2}dy^0 - 2dx^{-3}dy^1 + 3dx^{-4}dy^2 - 4dx^{-5}dy^3 +$ ec.
la qual come l' altra ridotta da . . . . . .

$$\frac{x^2dy}{2dx} - \frac{2x^3d^2y}{2.3dx^2} + \frac{3x^4d^3y}{2.3.4dx^3} - \frac{4x^5d^4y}{2.3.4.5dx^4} + \text{ec.} = {}^2\!\int dydx$$

eguale ancora ad $\int ydx$, e per conseguenza all' altra poco fa trovata, la qual egualità, sebbene apertamente non si manifesti, tuttavia si può vedere, differenziando e l' una, e l' altra due volte, posto il dx costante, conciosiachè distruggendosi vicendevolmente tutti gl' altri termini, altro non vi resta in amendue, che il $dydx$.

Molte altre considerazioni, che mi occorrerebbono per ora le ometto, e come non del tutto necessarie, e come poco dicevoli alla intenzion mia, onde anzi che annojarla, con dilungarmi in cose a Lei superflue, bramo unicamente di attestarle il mio ossequiosissimo rispetto.

Dunque ringraziandola del gradimento, che V. S. Illustriss. s'è compiaciuta significarmi di questa mia tenuissima cosa, non meno che del prezioso regalo, che mi fa della dottissima sua lettera ultimamente impressa; e pregandola istantemente a continuarmi le sue pregiatissime grazie, ho l'onore di protestarmi con tutta la maggior stima, e con la più umile riverenza ec.

P.S. Rileggendo V. S. Illuſtriſs. queſta mia formola, non potranno all' acutezza del ſuo ingegno non occorrere ſopra di eſſa qualcune importanti, ed utili rifleſſioni; Supplico per tanto la ſomma di lei bontà, e corteſia, che di già ho avuta la ſorte di eſperimentare, a volermi far la grazia di comunicarmele, e di bel nuovo ſono

Torino li 23 Luglio 1754.

Di V. S. Illuſtriſs.

Devotiſs., ed obbligatiſs. Servitore
LUIGI DE LA GRANGE.